

06/05 w -y.m.m.?

ненуль и базис

$$B(w) = (A_{j_1}, \dots, A_{j_{s-1}}, A_k, A_{j_{s+1}}, \dots, A_{j_r})$$

$$w_j = 0, j \notin B(w), j \neq k; w_j = 0, j \notin B(w)$$

Д-м, что w -y.m.m. Воспользуемся крит. y.m.m.:

$$A_{j_1} w_{j_1} + \dots + A_{j_{s-1}} w_{j_{s-1}} + A_k w_k + A_{j_{s+1}} w_{j_{s+1}} + \dots + A_{j_r} w_{j_r} = b, (*)$$

$w_j = 0, j \notin B(w)$; $B(w) = (j_1, \dots, j_{s-1}, k, j_{s+1}, \dots, j_r)$; столбцы A лнн/нел.

(*) выполнено, т.к. $Aw = b$

$$\alpha_1 A_{j_1} + \dots + \alpha_{s-1} A_{j_{s-1}} + \alpha_k A_k + \dots + \alpha_r A_{j_r} = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0, i=1, r, i=k, i \neq s \Rightarrow \text{столбцы } A \text{ лнн/нел. Д-м.}$$

$$(**) \Rightarrow \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^r \alpha_i A_{j_i} + \alpha_k A_k = 0$$

$$A_k = BB^{-1} A_k = B \gamma_k = A_{j_1} \gamma_{1k} + \dots + A_{j_r} \gamma_{rk} = \sum_{i=1}^r A_{j_i} \gamma_{ik}$$

$$\text{В итоге получаем: } \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^r \alpha_i A_{j_i} + \alpha_k \sum_{i=1}^r A_{j_i} \gamma_{ik} = 0 = \text{группировка}$$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^r A_{j_i} (\alpha_i + \alpha_k \gamma_{ik}) + \alpha_k A_{j_s} \gamma_{sk} = 0 \Rightarrow \alpha_k \gamma_{sk} = 0, \alpha_i + \alpha_k \gamma_{ik} = 0$$

$\Rightarrow$ столбцы A лнн/нел $\Rightarrow w$ -y.m.m. с базисом $B(w)$, где $B(w) = (A_{j_1}, \dots, A_{j_{s-1}}, A_k, A_{j_{s+1}}, \dots, A_{j_r})$

→ такая же роль как и у м-м в лнн. ал.

б) Симплекс-таблица y.m.m.

Вспомним, что приведем-я к y.m.m. $(u, B(u))$ форма канон.

зад. ЛП имеет вид:

$$\pi_1: w_j = u_j + \sum_{j \in B(u)} \gamma_{ij}^j w_j + \sum_{l=1}^r \theta_l u_l^e$$

привед. форма: $Y(u) = Y(0) - \sum_{j \in B} \Delta_j w_j$

$$\bar{u} + \sum_{j \in B} \gamma_{ij} w_j = \bar{0}$$

$$\pi_i: w_j = u_j + \sum_{j \in B(u)} \gamma_{ij}^j w_j + \sum_{l=1, l \neq i}^r \theta_l u_l^e$$

$$\pi_s: w_j = u_j + \sum_{j \in B(u)} \gamma_{sj}^j w_j + \sum_{l=1, l \neq s}^r \theta_l u_l^e$$

$$\pi_r: w_j = u_j + \sum_{j \in B(u)} \gamma_{rj}^j w_j + \sum_{l=1, l \neq r}^r \theta_l u_l^e$$

$$\Delta: Y(0) = Y(u) + \sum_{l=1}^r \theta_l u_l^e + \sum_{j \in B} \Delta_j w_j (1)$$

	$B(\vartheta)$	y	y	не базис		базис		базис		не базис		базис		базис		u^n
		y	y	u^1	...	u^r	...	u^i	...	u^k	...	u^s	...	u^1	...	u^n
Γ_1	j^1	ϑj^1	0	y_1^1		0		0		y_1^k		0		1		y_1^n
Γ_i	j^i	ϑj^i	0	y_i^1		0		1		y_i^k		0		0		y_i^n
мн-во																
Γ_s	j^s	ϑj^s	0	y_s^1		0		0		y_s^k		1		0		y_s^n
Γ_r	j^r	ϑj^r	0	y_r^1		1		0		y_r^k		0		0		y_r^n
Δ	$y(\vartheta)$	1		Δ_1		0		0		Δ_k		0		0		Δ_n

Ф-уши $y(u)$ $B^{-1}A_1$ $B^{-1}A_k$ $B^{-1}A_{ji} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j^i$

Далее, обратим вложение, что

	$B(\vartheta)$	y	y	u^1	...	u^r	...	u^i	...	u^k	...	u^s	...	u^1	...	u^n
Γ	j	$y^0 = B^{-1}b$	0	$y_1^1 = B^{-1}A_1$		$y_r^1 = B^{-1}A_r$		y_i^1		y^k		y^s		y^1		$y^n = B^{-1}A_n$
Δ		1		Δ_1		Δ_r		Δ_i		Δ_k		Δ_s		Δ_j		Δ_n

$$\Delta_j = \langle \bar{c}, B^{-1}A_j \rangle - c_j; \Delta_{ji} = \langle \bar{c}, B^{-1}A_{ji} \rangle - c_{ji} = 0 //$$

Обозн. Симплекс-таблица: $S(\vartheta) = \begin{pmatrix} \Gamma \\ \Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \Delta \end{pmatrix}$

$$// \min \frac{\vartheta j^i}{y_i^k} = \frac{\vartheta j^s}{y_s^k} \text{ — разрешающий элемент}$$

Применение симплекс-мет. с исп-нием симплекс-табл. более наглядно

// $\omega: \omega j^i = \vartheta j^i - \frac{y_i^k}{y_s^k} \vartheta j^s$; как от ϑ перейти к ω ? //

Д/перехода от S -табл. т. $(\vartheta, B(\vartheta))$ к S -табл. т. $(\omega, B(\omega))$ надо применить к исходной таблице метод исключения Гаусса-Жордана с разрешающим элем y_s^k , т.е.

$$\left. \begin{aligned} 1) \Gamma_s(\omega) &= \frac{\Gamma_s(\vartheta)}{y_s^k} \\ 2) \Gamma_i(\omega) &= \Gamma_i(\vartheta) - y_i^k \frac{\Gamma_s(\vartheta)}{y_s^k} \\ 3) \Delta(\omega) &= \Delta(\vartheta) - \Delta_k(\vartheta) \frac{\Gamma_s(\vartheta)}{y_s^k} \end{aligned} \right\} \text{мн-во} \quad // S(\omega) = \begin{pmatrix} \Gamma \\ \Delta \end{pmatrix}$$

З1 $y(u) = 2u^1 - u^2 + 2u^3 + 3u^4 \rightarrow \max, u \in U = \{u \in \mathbb{R}^4 : u \geq 0, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u^1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} u^2 + \dots\}$

$$+\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}u^3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}u^4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- 1) Упр. П.
- 2) Приведенный вид
- 3) Таблица

Решить зад. с помощью симплекс-метода

$$Y(u) = \langle C, u \rangle, \text{ где } C = (2, -1, 2, 3)$$

$$u_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B(u_0) = (A_1, A_2), \text{ где } B = 2$$

Привед. форма: $J(u) = J(u) + \sum_{j \in B} \lambda_j u^j; \bar{u} = \bar{u} + \sum_{j \in B} \lambda_j u^j$

$$2u^1 + 4u^3 + 3u^4 = 4 \Leftrightarrow \underline{2} = u^1 + 0 \cdot u^2 + 2u^3 + \frac{3}{2}u^4$$

$$2u^2 + 2u^3 - u^4 = 2 \Leftrightarrow \underline{1} = 0 \cdot u^1 + 1 \cdot u^2 + 1 \cdot u^3 - \frac{1}{2}u^4$$

$$J(u) = 2(2 - 2u^3 - \frac{3}{2}u^4) - (1 - u^3 + \frac{1}{2}u^4) + 2u^3 + 3u^4 = 3 - u^3 - \frac{1}{2}u^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{3} = J(u) + u^3 + \frac{1}{2}u^4 \quad // \text{ Привед. форма г/функции на}$$

Составим симплекс-таблицу $S(u)$

$$// \bar{u} = \bar{u} + \sum$$

	B	Y	u^1	u^2	u^3	u^4
Γ_1^0	1	2^{u^1}	1	0	2^{u^3}	$\frac{3}{2}$
Γ_2^0	2	1^{u^2}	0	1	1^{u^3}	$-\frac{1}{2}$
Δ	3	0	0	1	$\frac{1}{2}$	

$\rightarrow$ разрешающ. эл-т
 $\gamma_s^k - ? \quad (k=3)$
 $\min \{ \frac{\gamma_1^3}{\gamma_1^3}, \frac{\gamma_2^3}{\gamma_2^3} \} = \min \{ \frac{2}{2}, \frac{1}{1} \} = 1 \Rightarrow S = 1, 2 \Rightarrow \underline{S=2}$

$\gamma_s^k = \gamma_2^3 = 1 \Rightarrow \{ A_3 \text{ выкидываем.} \} \Rightarrow B(u) = (A_1, A_2)$
 Ак ставим

$$\Gamma_2(u_2) = \frac{\Gamma_2(u)}{1}; \Gamma_1(u_2) = \Gamma_1(u) - \gamma_1^3 \cdot \frac{\Gamma_2(u)}{1}; \Delta(u_2) = \Delta(u) - \Delta_3(u) \cdot \frac{\Gamma_2(u)}{1}$$

новая симплекс-табл.

	B	Y	u^1	u^2	u^3	u^4
Γ_1	1	0	1	-2	0	$5/2$
Γ_2	3	1	0	1	1	$-1/2$
Δ	2	0	-1	0	1	

$\gamma_s^k - ? \Rightarrow k=4, S=1 \Rightarrow \gamma_1^4 = \frac{5}{2}$

$A_4 \rightarrow A_1$
 $\Gamma_1(u_2) = \frac{\Gamma_1(u_2)}{5/2}; \Gamma_2(u_2) = \Gamma_2(u_2) - \gamma_2^4 \cdot \frac{\Gamma_1(u_2)}{5/2}$
 $\Delta(u_2) = \Delta(u_2) - \Delta_4 \Gamma_2(u_2)$

выпущ. упр. П (т.е. есть в б.б.исе)
 $u_1 = (0, 0, 1, 0), B(u_1) = (A_1, A_3)$
 базис

новая симплекс-табл.

	B	Y	u^1	u^2	u^3	u^4
Γ_1	4	0	$2/5$	$-4/5$	0	1
Γ_2	3	1	$4/5$	$3/5$	1	0
Δ	2	$-2/5$	$-1/5$	0	0	

$u_2 = (0, 0, 1, 0), B(u_2) = (A_3, A_4)$

$\Delta_k \leq 0 \Rightarrow$ реш-е найдено

Проблема: $Y(u_2) = Y(u_1)$, т.е. симплекс-метод сделал больше шагов

Ф/з: выбрать $(k=n)$ д/1-го разрешающего э-та (должно получиться все то же самое)

4) Невероят. задачи

Как наз-ся задачи, допустимое мн-во X имеет лишь невероят. упр. т. (все базис коорд-ты > 0)

1] В канонич. зад. мн-во $U = \{u \geq 0, Au = b, b \neq 0\}$ невероят., $m = r = m < n$ и $\{v_0\}$ - некот. упр. т. мн-ва U . Тогда мал. за шагом, реализуя симплекс-метод, получим послед-е упр. т. U и их базисы $(v_0, B(v_0)), \dots, (v_r, B(v_r)), \dots$ (симплекс-процесс), X оборвется на каком-то шаге $k = r$ опр-нием упр. т. $(v_r, B(v_r))$, в X реализуется либо случай I, когда v_r - реш-е зад., либо случай II, когда зад. не имеет реш-я, $J^* = -\infty$.

У невероят. упр. т. все базис коорд-ты $> 0 \Rightarrow \min_{i \in I_k(v_0)} \frac{v_j^i}{v_k^i} = \frac{v_j^s}{v_k^s} > 0$
 $\Rightarrow J(w) = J(v) - \Delta_k \cdot \frac{v_j^s}{v_k^s} \leq J(v)$
правильно выбора разреш. э-та

П.о. симплекс-процесс дает $J(v_0) > J(v_1) > \dots > J(v_r) > \dots$ (3)
в X невероят. зад. Но упр. т. у мн-ва U и их базисов конечно число, а в силу (3) упр. т. в процессе повторяться не смогут, и все законится реализацией одного из случаев I или II.

А что будет, if задача невероят.? В этом случае может случиться так, что $v_j^s = 0 \Rightarrow J(w) = J(v) - \Delta_k \cdot \frac{v_j^s}{v_k^s} = J(v)$. Убывания нет. Более того, $w = v$; сменился лишь базис $B(w) = (A_{j_1}, \dots, A_{j_{s-1}}, A_k, A_{j_{s+1}}, \dots, A_{j_r})$. Что будет, if симплекс-процесс будет сидеть в одной т. и будет перебирать в каком-то к-ке ее базисы?

Будет происходить заклинивание (возникающее из-за $\frac{v_j^s}{v_k^s} = 0$ — когда мы остаемся в одной и той же упр. т., но базисы перебираем по циклу).

8) Антициклин

Антициклон будет наз-ть правило выбора разрешающего эл-та симплекс-таблицы, а уточняет старое правило и позволяет избежать заикливания.